МАТЕМАТИКА

УДК 517.984

О ПРИВОДИМОСТИ ОПЕРАТОРОВ ВЗВЕШЕННОЙ КОМПОЗИЦИИ

Теубе С. Мбаинаисем, Серинь А. Ло, Мусса О.А. Салем

Университет в Дакаре, Дакар, Сенегал

ON REDUCIBILITY OF THE WEIGHTED COMPOSITION OPERATORS

Teube Cyrille Mbainaissem, Serine Alou Lo, Moussa Ould Ahmed Salem

University Cheikh Anta Diop de Dakar, Dakar, Senegal

Рассматривается вопрос о приводимости оператора взвешенной композиции с помощью преобразования Ляпунова к оператору с коэффициентом, инвариантным относительно отображения, порождающего оператор. В случае периодического отображения описаны топологические препятствия для приводимости. Получен явный вид соответствующего преобразования Ляпунова.

Ключевые слова: *оператор взвешенной композиции, преобразование Ляпунова, индекс Коши, приводимость, гомологическое уравнение.*

The question under consideration is reduction of a weighted composition operator to an operator with invariant coefficient by Liapunov transformation. Topological obstruction to be reducible is described in the case of periodic mapping generating operator. Explicit form of the corresponding Liapunov transformation is given.

Keywords: *weighted composition operator, Liapunov transformation, Cauchy index, reducibility, homological equation.*

Введение

Линейный ограниченный оператор B, действующий в банаховом пространстве $F(X)$ функций на множестве X, называется *оператором взвешенной композиции* или *оператором взвешенного сдвига* (ОВС) , если он может быть представлен в виде

$$Bu(x) = a(x)u(\alpha(x)), \ x \in X, \quad (0.1)$$

где $\alpha : X \to X$ есть некоторое отображение, $a(x)$ – заданная функция на X. Операторы вида

$$T_\alpha u(x) = u(\alpha(x)), \ x \in X, \quad (0.2)$$

называют *операторами композиции* или *операторами сдвига*.

Такие операторы, а также порожденные ими операторные алгебры и связанные с ними функциональные уравнения изучались многими авторами в различных функциональных пространствах как самостоятельный объект и в связи с различными приложениями [1]–[4], [6]–[11].

Исследование конкретного класса операторов тесно связано с исследованием банаховой алгебры, порожденной такими операторами. При этом коммутативные алгебры устроены существенно проще, что помогает при исследовании соответствующих операторов. Рассматриваемые операторы (с фиксированным α) порождают некоммутативную банахову алгебру. Но, если ограничится рассмотрением операторов, коэффициенты которых постоянны или инвариантны относительно сдвига $(a(\alpha(x)) = a(x))$, то соответствующая операторная алгебра коммутативна.

Поэтому представляет интерес вопрос о сведении исследования заданного оператора к рассмотрению другого оператора, имеющего более «хороший» коэффициент – постоянный или инвариантный.

Подобные задачи рассматривались при исследовании других видов операторов. Например, одним из аналогов рассматриваемой задачи является задача о приведении дифференциального оператора с частными производными к каноническому виду.

Другой аналог известен в теории линейных систем дифференциальных уравнений вида

$$\dot{u}(t) = A(t)u(t). \quad (0.3)$$

Пусть матрица-функция $D(t)$ ограничена, обратима и ее обратная $D(t)^{-1}$ также ограничена и их производные также ограничены. Замена в системе (0.3) неизвестной функции на $z(t) = D(t)u(t)$ называется *преобразованием Ляпунова* системы.

Линейная система (0.3) называется *приводимой*, если существует преобразование Ляпунова, приводящее эту систему к системе с постоянным коэффициентом [5].

По аналогии с теорией дифференциальных уравнений *преобразованием Ляпунова* будем называть обратимый оператор D умножения на непрерывную функцию $d \in C(X)$:

$$Du(x) = d(x)u(x).$$

ОВС B будем называть *приводимым к оператору с постоянным коэффициентом*, если существует преобразование Ляпунова такое, что

$$DBD^{-1} = a_0 T_\alpha, a_0 \in C. \quad (0.4)$$

ОВС B будем называть *приводимым к оператору с инвариантным коэффициентом,* если существует преобразование Ляпунова такое, что

$$DBD^{-1} = a_0(x)T_\alpha, \qquad (0.5)$$

где $a_0(\alpha(x)) = a_0(x)$.

С операторной точки зрения эти определения означают, что оператор $B = aT_\alpha$ подобен оператору a_0T_α с инвариантным или постоянным коэффициентом. Как уже отмечалось, банахова алгебра, порожденная такими операторами взвешенного сдвига, является коммутативной, а в случае, когда операторы рассматриваются в пространстве $L_2(X,\mu)$, является C^* – алгеброй. Это позволяет, например, получить спектральную теорему для приводимых операторов взвешенного сдвига.

В работе рассмотрен вопрос о приводимости для операторов взвешенного сдвига с непрерывными коэффициентами, порожденных непрерывными периодическими отображениями компактного отделимого топологического пространства X. Такие операторы действуют в классических банаховых пространствах функций на X – пространствах $L_p(X,\mu)$ и $C(X)$. Для произвольных отображений α спектр ОВС зависит от рассматриваемого функционального пространства, но в случае периодического отображения α спектр ОВС одинаков во всех указанных классических пространствах. Полученные в статье результаты также справедливы при рассмотрении операторов в любом банаховом пространстве функций на X, в котором эти операторы ограничены.

1 Факторизация со сдвигом и гомологическое уравнение

Прежде всего заметим, что, в силу компактности X, условие обратимости оператора умножения на непрерывную функцию, входящее в определение преобразования Ляпунова, записывается как условие, что $d(x) \neq 0$ для всех x.

Любое преобразование Ляпунова переводит оператор взвешенного сдвига (0.1) с непрерывным коэффициентом в оператор взвешенного сдвига (с другим непрерывным коэффициентом):

$$DBD^{-1} = DaT_\alpha D^{-1} = a(x)\frac{d(x)}{d(\alpha(x))}T_\alpha.$$

Поэтому вопрос о приводимости оператора эквивалентен вопросу о представлении коэффициента a в виде

$$a(x) = a_0(x)\frac{d(\alpha(x))}{d(x)}, \qquad (1.1)$$

с постоянным или инвариантным a_0. Такое представление называется *факторизацией со сдвигом* функции a. Заметим, что если функция d инвариантная, то при преобразовании Ляпунова оператор переходит в себя. Поэтому функция d определена с точностью до инвариантного множителя.

Подход, основанный на факторизации со сдвигом коэффициента, применялся в основном при рассмотрении операторов взвешенного сдвига на контуре [3], [4]. Эти работы связаны с исследованием сингулярных интегро-функциональных уравнений на контуре Γ, содержащих сингулярный интегральный оператор Коши

$$Su(z) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{u(\xi)}{\xi - z}d\xi.$$

Заметим, что оператор $SD - DS$ является компактным в случае непрерывной функции d и не является компактным в случае кусочно-непрерывной функции. Поэтому условие непрерывности функции d существенно в теории сингулярных интегро-функциональных уравнений.

Вопрос о существовании факторизации со сдвигом для заданной функции тесно связан с разрешимостью гомологического уравнения, соответствующего заданному отображению. Так называются [2], [6], [7], [11] функциональные уравнения вида

$$\varphi(\alpha(x)) - \varphi(x) = f(x). \qquad (1.2)$$

Действительно, пусть $a(x) > 0$ для всех x. Обозначив

$$\varphi(x) = \ln s(x),$$
$$g(x) = \ln a(x),$$
$$\xi(x) = \ln a_0(x)$$

и прологарифмировав равенство (1.1), получаем для функции φ гомологическое уравнение

$$\varphi(\alpha(x)) - \varphi(x) = g(x) - \xi(x).$$

Левая часть гомологического уравнения (1.2) имеет вид $(T_\alpha - I)\varphi$. Поэтому уравнение разрешимо тогда и только тогда, когда правая часть f принадлежит образу оператора $T_\alpha - I$. В общем случае образ оператора $T_\alpha - I$ незамкнут и, следовательно, не существует явных необходимых и достаточных условий разрешимости гомологического уравнения. Классическим примером гомологического уравнения, обладающего «плохими» свойствами, является уравнение, связанное с иррациональным поворотом окружности [6], [7] . Если окружность реализовать как единичную окружность на комплексной плоскости

$$\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\},$$

то такое отображение действует по формуле $\alpha(z) = e^{i2\pi h}z$, где h – иррациональное число.

Патологические свойства соответствующего гомологического уравнения хорошо известны. Например, в [7] доказано, что для любой функции, которая не является полиномом от z, существует такое h, что решение является неизмеримой функцией. Поэтому существование непрерывного или ограниченного решения (и соответственно, приводимость оператора, порожденного иррациональным поворотом, к оператору с постоянным коэффициентом) является исключительным случаем; множество коэффициентов a, для которых возможна факторизация со сдвигом, есть некоторое незамкнутое подмножество в $C(X)$, которое не описывается явно и существенно зависит от арифметических свойств иррационального числа h.

Случай периодического отображения здесь особый: образ оператора $T_\alpha - I$ замкнут, гомологическое уравнение нормально разрешимо и более доступно для исследования. В работе [11] показано, что этот случай единственный: если отображение α обратимо, то гомологическое уравнение нормально разрешимо в пространстве $C(X)$ непрерывных функций на компактном пространстве тогда и только тогда, когда отображение α является периодическим.

Напомним некоторые понятия, связанные со свойством периодичности отображения.

Пусть $\alpha_0(x) \equiv x, \alpha_k(x) = \alpha(\alpha_{k-1}(x)),\ k = 1,2,\ldots$

Отображение α называется *периодическим* с периодом m, если $\alpha_m = \alpha_0$ и $\alpha_k \neq \alpha_0$ для $1 \le k < m$.

Точка x называется *периодической* с периодом $p(x)$, если $\alpha_{p(x)}(x) = x$ и $\alpha_k(x) \neq x$ для $1 \le k < p(x)$.

Если отображение α периодическое с периодом m, то каждая точка x является периодической и число $p(x)$ является делителем m. Заметим, что при этом может быть, что $p(x) < m$ для всех x.

***Пример* 1.1.** Пусть

$$X = \left\{ z = re^{i2\pi t} : 0 \le r \le 1; t = \frac{k}{12}, k \in \{0,1,\ldots,11\} \right\}.$$

Как множество на комплексной плоскости, это пространство состоит из шести отрезков длины 2, середины которых есть точка 0. Отображение $\alpha : X \to X$, заданное формулой

$$\alpha(z) = \begin{cases} e^{i\frac{2}{3}\pi}, & k = 0,2,\ldots,10, \\ -z, & k = 1,3,\ldots,11, \end{cases}$$

является периодическим с периодом 6, но здесь точка 0 неподвижная (имеет период 1), периоды отличных от нуля точек, соответствующих четным k, есть 3, периоды отличных от нуля точек, соответствующих нечетным k, есть 2 и нет точек с периодом 6.

Топологическое пространство X называется α-*приводимым*, если существует разбиение X на два непустые замкнутые подмножества X' и X'', инвариантные относительно отображения α. Топологическое пространство X называется α-*связным*, если такое разбиение невозможно. Заметим, что α-связное пространство может быть несвязным.

Рассматриваемый вопрос связан также со свойством алгебраичности оператора, введенным фон Нейманом. Если отображение α периодическое, то любой оператор взвешенного сдвига с постоянным коэффициентом является алгебраическим. Поэтому необходимым условием приводимости к оператору с постоянным коэффициентом является его алгебраичность.

Линейный оператор A называется *алгебраическим*, если существует полином

$$P(z) = z^l + p_{l-1}z^{l-1} + \ldots + p_0,\ p_k \in \mathbb{C},$$

такой, что $P(A) = 0$.

Такой полином наименьшей степени называется *характеристическим полиномом* оператора и обозначается $Ch_A(z)$. Корни $Ch_A(z)$ называются *характеристическими числами* оператора A.

В конечномерном пространстве любой оператор является алгебраическим. Он является корнем своего характеристического многочлена (теорема Гамильтона – Келли). Частными случаями алгебраических операторов являются *нильпотентные* операторы $(A^m = 0)$, *идемпотентные* операторы $(A^2 = A)$, *инволютивные* операторы $(A^2 = I)$ и *обобщенно инволютивные* операторы $(A^m = I)$. Теория алгебраических операторов построена, например, в [8]. Уравнения с обобщенно инволютивными операторами изучались в [3].

Условие алгебраичности оператора является достаточно сильным и из алгебраичности вытекает ряд свойств, не выполненных для произвольных операторов, но типичных для операторов в конечномерных пространствах. Спектр алгебраического оператора является конечным множеством и совпадает с множеством характеристических чисел. При этом образ оператора $A - \lambda I$ замкнут при любом спектральном значении λ, что не выполнено для произвольных операторов, у которых спектр является конечным множеством.

Необходимые и достаточные условия алгебраичности операторов композиции (без весового коэффициента) были получены в [9]. В работе [10] были получены условия алгебраичности для более сложных операторов взвешенного сдвига и описаны их характеристические полиномы. Нам потребуется основной результат из [10].

Обозначим

$$a_k(x) = \prod_{j=0}^{k-1} a(\alpha_j(x)).$$

***Теорема* 1.1.** *Для оператора взвешенного сдвига B с непрерывным коэффициентом a следующие условия эквивалентны:*

i) *существует полином*

$$P(z) = z^l + p_{l-1}z^{l-1} + \ldots + p_0, p_k \in C, \text{где } p_0 \neq 0,$$

такой, что $P(B) = 0$;

ii) *отображение* α *является периодическим с периодом* m, $a(x) \neq 0$ *для всех* x *и функция* $a_m(x)$ *принимает конечное множество значений.*

При выполнении указанных условий характеристический полином $Ch_B(z)$ *имеет вид*

$$Ch_B(z) = \prod_{k=1}^{n} (z - \lambda_k), \qquad (1.3)$$

где $n \leq m, n \leq l$, $\lambda_k \neq 0$ *и* $\lambda_k \neq \lambda_j$ *при* $k \neq j$, *т. е. все характеристические числа простые.*

Если, кроме того, пространство X *является* α*-связным, то для алгебраического оператора* $a_m(x) \equiv C = const$ и $\lambda_k^m = C$ для всех k.

При этом в общем случае не все корни степени m *из числа* C *являются характеристическими числами.*

2 Приводимые операторы взвешенного сдвига

Связь задачи факторизации с гомологическим уравнением для функций, принимающих положительные значения, показана выше. В случае комплексно-значных функций при сведении к гомологическому уравнению возникают дополнительные осложнения, связанные с тем, что логарифм является многозначной функцией.

Будем говорить, что *существует непрерывная ветвь логарифма* функции $a(x)$, если существует непрерывная на X вещественно-значная функция ψ такая, что

$$a(x) = e^{\ln|a(x)| + i2\pi\psi(x)}.$$

***Теорема* 2.1.** *Пусть пространство* X *является* α*-связным, отображение* α *является периодическим и* $a(x) \neq 0$ *для всех* x. *Если существует непрерывная на* X *ветвь логарифма коэффициента* a, *то оператор* aT_α *приводится к оператору с инвариантным коэффициентом.*

При этом оператор приводится к оператору с постоянным коэффициентом тогда и только тогда, когда он является алгебраическим.

Доказательство. Рассмотрим гомологическое уравнение

$$\varphi(\alpha(x)) - \varphi(x) = f(x), \qquad (2.1)$$

где

$$f(x) = g(x) - \xi(x),$$
$$g(x) = \ell n\,|\,a(x)\,| + i2\pi\psi(x).$$

Здесь g есть заданная непрерывная функция, а φ и $\xi(x)$ – неизвестные функции.

В силу периодичности отображения α оператор T_α является алгебраическим и имеет, согласно теореме 1.1, простой спектр. Поэтому применимы общие методы исследования алгебраических операторов [8].

Кроме того, здесь имеем равенство $T_\alpha^m = I$, из которого следует, что отображение

$$\mathbb{Z}_m \ni k \to T_\alpha^k \qquad (2.2)$$

есть линейное представление конечной циклической группы $\mathbb{Z}_m$ в пространстве $C(X)$. Применение теории представлений групп [12] позволяет получить более явные результаты, чем в случае произвольных алгебраических операторов.

Заметим, что обычно рассматриваются линейные представления групп в гильбертовы пространства. Но в случае конечных групп основные факты теории представлений имеют чисто алгебраический характер и справедливы в случае представлений в банаховы пространства, в частности, для линейных представлений в пространстве $C(X)$.

Конечная коммутативная группа $\mathbb{Z}_m$ имеет m неприводимых представлений ϱ_j, эти представления одномерны и действуют по формуле

$$\mathbb{Z}_m \ni k \to \varrho_j(k) = \omega^{kj}, \qquad (2.3)$$

где $\omega = e^{\frac{i2\pi}{m}}$, $j = 0,\ldots,m-1$.

Любое линейное представление группы $\mathbb{Z}_m$ разлагается по неприводимым представлениям. Это разложение строится следующим образом. Операторы

$$P_j = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} \omega^{-kj} T_\alpha^k \qquad (2.4)$$

являются ограниченными проекторами, при этом

$$\sum_{j=1}^{m-1} P_j = I,\; P_k P_j = 0 \text{ для } k \neq j;$$
$$T_\alpha = \sum_{j=0}^{m-1} \omega^j P_j. \qquad (2.5)$$

Первое и второе из этих равенств означают, что пространство $C(X)$ разлагается в прямую сумму замкнутых векторных подпространств $E_j = ImP_j$, а последнее равенство означает, что на подпространстве E_j оператор T_α действует как умножение на число ω^j.

Сделаем еще одно замечание. Здесь имеем $T_\alpha^m = I$, откуда следует, что все характеристические числа являются корнями из 1 степени m, т.е. имеют вид ω^j. Но может быть, что не все числа ω^j являются характеристическими. Иначе говоря, существуют периодические отображения с периодом m, такие, что характеристический полином для T_α имеет вид

$$Ch_T(z) = \prod_{j=1}^{p} (z^{m_j} - 1),$$

где $m = \prod_{j=1}^{p} m_j$, а степень характеристического полинома есть число $\sum_{j=1}^{p} m_j < m$. В этом случае проектор P_j ненулевой тогда и только тогда, когда ω^j является характеристическим числом оператора T_α.

Отображение с такими свойствами рассмотрено в примере 1.1. В этом примере отображение α является периодическим с периодом $m = 6$, а характеристический полином есть полином степени 4

$$Ch_T(z) = (z+1)(z^3-1),$$

характеристические числа есть $\omega^0 = 1, \omega^2$, $\omega^3 = -1, \omega^4$, а числа ω и ω^5 не являются характеристическими для рассматриваемого оператора T_α.

С точки зрения теории представлений это замечание означает, что в общем случае в разложение представления (2.2) входят не все неприводимые представления.

Но пространство E_0 нетривиально, так как содержит постоянные; поэтому число $\omega^0 = 1$ всегда является характеристическим и проектор

$$P_0 = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} T_\alpha^k$$

всегда ненулевой.

Полученное разложение представления позволяет детально исследовать уравнение (2.1). Из (2.5) получаем, что

$$T_\alpha - I = \sum_{j=1}^{m-1} (\omega^j - 1)P_j$$

и

$$Im(T_\alpha - I) = Im\left[\sum_{j=1}^{m-1} P_j\right] = Im(I - P_0) = Ker\ P_0.$$

Таким образом, равенство

$$P_0 f = 0 \qquad (2.6)$$

является необходимым и достаточным условием существования решения уравнения (2.1).

В рассматриваемом гомологическом уравнении правая часть $f(x) = g(x) - \xi(x)$ содержит неизвестную функцию ξ. Поэтому условие разрешимости

$$P_0 f \equiv P_0 g - P_0\xi = 0 \qquad (2.7)$$

рассматриваем как уравнение относительно функции ξ. Существует много функций ξ, для которых выполнено это равенство. Но нас интересует инвариантная функция ξ. Из условия инвариантности $(T_\alpha\xi = \xi)$ следует, что $P_0\xi = \xi$; поэтому из (2.7) однозначно находится инвариантная функция

$$\xi(x) = (P_0 g)(x) = \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1} g(\alpha_j(x)), \qquad (2.8)$$

для которой выполнено условие разрешимости. При сделанном выборе функции ξ выполнено условие разрешимости уравнения (2.1), при этом разные решения отличаются на инвариантную функцию. Поэтому для построения преобразования Ляпунова достаточно построить одно из решений. Такое решение может быть задано выражением

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{m-1}\frac{1}{\omega^j - 1}P_j f = \sum_{j=1}^{m-1}\frac{1}{\omega^j - 1}\left[\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\omega^{-kj}T_\alpha^k\right] f.$$

В силу инвариантности функции ξ получаем, что

$$\sum_{k=0}^{m-1}\omega^{-kj}T_\alpha^k\xi = \left[\sum_{k=0}^{m-1}\omega^{-kj}\right]\xi = 0.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \sum_{j=1}^{m-1}\frac{1}{\omega^j - 1}\left[\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\omega^{-kj}T_\alpha^k\right] g = \\ &= \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\left[\sum_{j=1}^{m-1}\frac{\omega^{-kj}}{\omega^j - 1}\right]T_\alpha^k g.\end{aligned} \qquad (2.9)$$

Теперь, положив $d(x) = e^{\varphi(x)}$ и $a_0(x) = e^{\xi(x)}$, из гомологического уравнения получаем факторизацию со сдвигом коэффициента a, что и требовалось.

Здесь выполнено равенство

$$a_0(x)^m = \prod_{j=0}^{m-1} a(\alpha_k(x)),$$

которое означает, что функция $a_0(x)$ есть непрерывная ветвь корня степени m из функции

$$\prod_{j=0}^{m-1} a(\alpha_k(x)).$$

Функция a_0 постоянна (и оператор приводится к оператору с постоянным коэффициентом), тогда и только тогда, когда

$$\prod_{j=0}^{m-1} a(\alpha_k(x)) = const.$$

Согласно теореме 1.1, это есть условие алгебраичности оператора B.

Обозначим

$$\gamma_k = \frac{1}{m}\left[\sum_{j=1}^{m-1}\frac{\omega^{-kj}}{\omega^j - 1}\right].$$

Эти числа не являются целыми и выражение $a(\alpha_k(x))^{\gamma_k}$ задает многозначную функцию. При этом может оказаться, что у этой функции не существует ветви, непрерывной на X. Из (2.9) следует что d представляется в виде

$$d(x) = \prod_{j=0}^{m-1} a(\alpha_k(x))^{\gamma_k},$$

где под правой частью понимается одна из непрерывных ветвей соответствующей многозначной функции, существование которой следует из условий теоремы. Теорема доказана.

Следствие. *Если отображение периодическое, то любой оператор взвешеного сдвига приводится к оператору* $a_0 T_\alpha$, *у которого* $|a_0(x)|$ *является инвариантной функцией.*

Доказательство. Рассмотрим гомологическое уравнение

$$\varphi(\alpha(x)) - \varphi(x) = f(x), \qquad (2.10)$$

где

$$f(x) = g(x) - \xi(x), \quad g(x) = \ell n\,|\,a(x)\,|\,.$$

Это уравнение разрешимо, если, как выше, взять

$$\xi(x) = (P_0 g)(x) = \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1} g(\alpha_j(x)).$$

Тогда функция $d(x) = e^{\varphi(x)}$ порождает требуемую факторизацию со сдвигом коэффициента a.

3 Топологические препятствия для приводимости

Использованное в теореме 2.1 условие существования непрерывной ветви логарифма не является необходимым. Покажем на примере, что это условие существенно.

***Пример* 3.1**. Пусть $X = \mathbb{S}^1$ и $\alpha(z) = \overline{z}$, это пример отображения, изменяющего ориентацию окружности. Для коэффициента $a(z) = z$ здесь выполнено $a(z)a(\alpha(z)) = z\overline{z} = 1$ и оператор

$$Bu(z) = zu(\overline{z}))$$

является алгебраическим.

Но для коэффициента $a(z) = z$ не существует факторизация вида

$$a(z) = a_0(z)\frac{d(\overline{z})}{d(z)}. \qquad (3.1)$$

Препятствием для факторизации здесь является индекс Коши $ind[a]$ непрерывной невырождающейся функции a, который определяется как приращение аргумента при обходе контура, деленное на 2π. В этом примере условие существования непрерывной ветви логарифма есть условие $ind[a] = 0$, для функции $a(z) = z$ это условие не выполнено – имеем $ind[a] = 1$.

Предположим, что выполнено (3.1), где функция $a_0(z)$ инвариантна:

$$a_0(\overline{z}) = a_0(z).$$

Из инвариантности функции $a_0(z)$ следует, что $ind[a_0] = 0$. Кроме того,

$$ind[d(\overline{z})] = ind\left[\frac{1}{d(z)}\right] = -ind[d(z)],$$

откуда следует, что

$$ind\left[a_0(z)\frac{d(\overline{z})}{d(z)}\right] = -2ind[d].$$

Таким образом, индекс Коши правой части из (3.1) является четным числом. Поэтому, если индекс Коши коэффициента a является нечетным числом, факторизация невозможна. В приведенном примере $ind[a] = 1$ и равенство (3.1) невозможно.

В общем случае возникают аналогичные препятствия для приводимости оператора. Пусть X есть произвольное компактное пространство и

$$\gamma : [0,1] \ni t \to \gamma(t) \in X$$

есть нетривиальная петля в X (непрерывное отображение, такое, что $\gamma(0) = \gamma(1)$, негомотопное постоянному). Тогда функция $a(\gamma(t))$ является непрерывной комплексно-значной функцией на $[0,1]$, такой, что $a(\gamma(0)) = a(\gamma(1))$. Приращение непрерывной ветви аргумента этой функции на $[0,1]$ кратно 2π, что позволяет определить понятие индекса Коши $ind_\gamma[a]$ на петле. Таким образом, в общем случае может существовать много топологических инвариантов (индексы Коши на каждой нетривиальной петле), от которых зависит приводимость оператора.

4 Условия приводимости оператора, порожденного симметрией квадрата

Рассмотрим детально вопрос о препятствиях к приводимости для конкретного примера. Пусть X есть граф, представляющий собой квадрат на плоскости с двумя средними линиями:

$$X = \{(x_1, x_2) : x_1 \in \{-1, 0, 1\},$$
$$x_2 \in [-1,1]\} \bigcup \{(x_1, x_2) : x_1 \in [-1,1],$$
$$x_2 \in \{-1, 0, 1\}\}.$$

Построим граф Y, полученный разрезанием графа X в вершинах квадрата. Это означает, что вместо каждой из вершин $(\pm 1, \pm 1)$ рассматриваем две точки $(\pm 1, \pm 1)^{\pm}$, считая, что одна из этих точек принадлежит одной стороне квадрата, примыкающей к вершине, а вторая точка принадлежит другой стороне квадрата, примыкающей к то же вершине. Граф Y может быть реализован как подмножество в $\mathbb{R}^3$, состоящее из шести отрезков:

$$Y = \{(0, x_2, 0) : x_2 \in [-1,1]\} \bigcup$$
$$\bigcup \{(x_1, 0, 0) : x_1 \in [-1,1]\} \bigcup$$
$$\bigcup \{(-1, x_2, x_2) : x_2 \in [-1,1]\} \bigcup$$
$$\bigcup \{(1, x_2, -x_2) : x_2 \in [-1,1]\} \bigcup$$
$$\bigcup \{(x_1, -1, -x_1) : x_1 \in [-1,1]\} \bigcup$$
$$\bigcup \{(x_1, 1, x_1) : x_1 \in [-1,1]\}.$$

При такой реализации графа получаем, что

$$(\pm 1, \pm 1)^{\pm} = (\pm 1, \pm 1, \pm 1) \in Y.$$

Выбор знаков здесь сделан так, чтобы при обходе сторон квадрата против часовой стрелки в каждой вершине мы переходили от точки $(\pm 1, \pm 1)^-$ к точке $(\pm 1, \pm 1)^+$.

Функция $a \in C(X)$ естественным образом задает функцию $\tilde{a}(x_1, x_2, x_3) = a(x_1, x_2)$, непрерывную на Y, при этом

$$\tilde{a}((\pm 1, \pm 1)^+) = \tilde{a}((\pm 1, \pm 1)^-).$$

Граф Y не содержит нетривиальных петель, поэтому у функции $\tilde{a}$ на Y существует непрерывная ветвь логарифма, т. е. имеется представление

$$\tilde{a}(x)=e^{g(x)},\ g(x)=\ell n\,|\,a(x)\,|+i2\pi\psi(x),$$

при этом функция $\psi(x)$ непрерывна на Y, но может быть разрывной на X. Но разность

$$\chi(a;(\pm1,\pm1)):=\psi((\pm1,\pm1)^{+})-\psi((\pm1,\pm1)^{-})$$

является целым числом. Таким образом, для рассматриваемого пространства X получаем четыре индекса Коши $\chi(a;(\pm1,\pm1))$, являющиеся топологическими инвариантами – это скачки функции ψ в соответствующих точках. Приводимость оператора зависит от этих топологических инвариантов, эта зависимость для разных отображении имеет разный характер.

***Теорема* 4.1.** *Пусть* α *есть отражение относительно диагонали* $x_1=x_2$, *т. е.*

$$\alpha(x_1,x_2)=(x_2,x_1).$$

Оператор $B=aT_\alpha$ *на* X *приводим к оператору с инвариантным коэффициентом тогда и только тогда, когда выполнены три условия*

1) *число* $\chi(a;(1,1))$ *является четным*;

2) *число* $\chi(a;(-1,-1))$ *является четным*;

3) *число* $\chi(a;(-1,1))+\chi(a;(1,-1))$ *является четным.*

Доказательство. Поскольку на Y существует непрерывная ветвь логарифма функции $\tilde{a}$ на Y, для этой функции, согласно теореме 2.1, существует факторизация со сдвигом:

$$\tilde{a}(x)=\tilde{a}_0(x)\frac{\tilde{d}(\alpha(x))}{\tilde{d}(x)}. \tag{4.1}$$

Здесь отображение α имеет период 2, оператор T_α задает представление группы $\mathbb{Z}_2$. Эта группа имеет только два неприводимых представления. Поэтому, согласно приведенным выше формулам,

$$\tilde{a}_0(x)=e^{\zeta(x)},$$

$$\begin{aligned}\zeta(x)&=\frac{1}{2}[g(x)+g(\alpha(x))]=\\&=\frac{1}{2}[\ell n\,|\,a(x)\,|+\ell n\,|\,a(\alpha(x))\,|]+\\&+i2\pi\frac{1}{2}[\psi(x)+\psi(\alpha(x))],\end{aligned} \tag{4.2}$$

Инвариантная функция a_0 на Y порождает на X инвариантную непрерывную функцию $a_0(x_1,x_2)=\tilde{a}(x_1,x_2,x_3)$ тогда и только тогда, когда

$$\tilde{a}_0((\pm1,\pm1)^{+})=\tilde{a}_0((\pm1,\pm1)^{-}).$$

Это условие выполнено тогда и только тогда, когда скачок функции

$$\tilde{\zeta}(x)=\frac{1}{2}[\psi(x)+\psi(\alpha(x))]$$

в каждой из четырех точек $(\pm1,\pm1)$ является целым числом. Обозначим через $\kappa(\tilde{\zeta};(\pm1,\pm1))$ скачок функции $\tilde{\zeta}$ в точке $(\pm1,\pm1)$.

Функция $\tilde{\zeta}$ непрерывна в точках $(1,1)$ и $(-1,-1)$, т. е.

$$\kappa(\tilde{\zeta},(1,1)=\kappa(\tilde{\zeta},(-1,-1)=0.$$

Непосредственные вычисления показывают, что

$$\begin{aligned}\kappa(\tilde{\zeta};(-1,1))&=-\kappa(\tilde{\zeta};(1,-1))=\\&=\frac{1}{2}[\chi(a;(-1,1))-\chi(a;(1,-1))].\end{aligned}$$

Таким образом, условием непрерывности функции a_0 является четность числа

$$\chi(a;(-1,1))-\chi(a;(1,-1)).$$

Аналогично, имеем

$$\tilde{d}(x)=e^{\varphi(x)},$$

$$\begin{aligned}\varphi(x)&=-\frac{1}{4}[g(x)-g(\alpha(x))]=\\&=\frac{1}{4}[\ell n\,|\,a(x)\,|-\ell n\,|\,a(\alpha(x))\,|]+\\&+i2\pi\frac{1}{4}[\psi(x)-\psi(\alpha(x))],\end{aligned} \tag{4.3}$$

Функция $\tilde{d}$ порождает на X непрерывную функцию d, если

$$\tilde{d}((\pm1,\pm1)^{+}=\tilde{d}((\pm1,\pm1)^{-}.$$

Это условие выполнено тогда и только тогда, когда скачок $\kappa(\tilde{\psi};(\pm1,\pm1))$ функции

$$\tilde{\psi}(x)=\frac{1}{4}[\psi(x)-\psi(\alpha(x))]$$

в каждой из точек $(\pm1,\pm1)$ является целым числом.

Непосредственные вычисления показывают, что эти скачки есть числа:

$$\kappa(\tilde{\psi};(1,1))=\frac{1}{2}\chi(a;(1,1));$$

$$\kappa(\tilde{\psi};(-1,-1))=\frac{1}{2}\chi(a;(-1,-1));$$

$$\begin{aligned}\kappa(\tilde{\psi};(-1,1))&=-\kappa(\tilde{\psi};(1,-1))=\\&=\frac{1}{2}[\chi(a;(-1,1))+\chi(a;(1,-1))].\end{aligned}$$

Таким образом, условием непрерывности функции a_0 является четность чисел $\chi(a;(1,1))$, $\chi(a;(-1,-1))$ и $\chi(a;(-1,1))+\chi(a;(1,-1))$. Заметим, что число $\chi(a;(-1,1))+\chi(a;(1,-1))$ четно тогда и только тогда, когда четно $\chi(a;(-1,1))-\chi(a;(1,-1))$. Теорема доказана.

Заметим, что из формулы (4.2) получаем, что в рассматриваемом примере

$$a_0(x)=[a(x)a(\alpha(x))]^{\frac{1}{2}},$$

причем существование непрерывной на X ветви квадратного корня следует из условия 3) теоремы.

Из формулы (4.3) следует, что

$$d_0(x) = \left[\frac{a(x)}{a(\alpha(x))} \right]^{\frac{1}{4}},$$

причем условия 1)–3) из формулировки теоремы есть условия существования непрерывной на X ветви корня четвертной степени.

Серинь Алиу Ло выражает благодарность кафедре функционального анализа БГУ за внимание во время стажировки в Белорусском государственном университете, одним из результатов которой является данная работа.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Антоневич*, *А.Б.* Линейные функциональные уравнения. Операторный подход / А.Б. Антоневич. – Минск: Университетское. – 1988. – 230 с.

2. *Katok*, *A.* Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems / A. Katok, B.Hasselblatt. – Cambridge: Cambridge University Press. – 1997. – 803 p.

3. *Karapetiants*, *N.* Equation with involutive operators / N. Karapetiants, S. Samko. – Boston: Birkh*ä*usser. – 2001. – 427 p.

4. *Kravchenko*, *V.G.* Introduction to the theory of singular integral operators with shift / V.G. Kravchenko, G.S. Litvinchuk. – Dordrecht: Kluver Acad. Publ. – 1994. – 288 p.

5. *Еругин*, *Н.П.* Приводимые системы / Н.П. Еругин // Тр. Матем. ин-та АН СССР. – 1946. – Т. 13. – С. 3–96.

6. *Аносов*, *Д.В.* Аддитивное функциональное гомологическое уравнение, связанное с эргодическим поворотом окружности / Д.В. Аносов // Изв. АН СССР, Сер. мат. – 1973. – Т. 37, № 6. – С. 1259–1274.

7. *Гордон*, *А.Я.* Достаточное условие неразрешимости аддитивного функционального гомологического уравнения, связанного с эргодическим поворотом окружности / А.Я. Гордон // Функц. анализ и прил. – Т. 9, № 6. – С. 71–72.

8. *Przeworska – Rolewicz*, *D.* Equations with transformed argument / D.Przeworska – Rolewicz. – Amsterdam and Warsaw: Elsevier scientific Publ. Comp. and Polish Scientific Publishers, 1973.

9. *Bottcher*, *A.* Algebraic compositions operators / A. Bottcher, H. Heidler // Integral equations and operator theory. – 1992. – Vol. 15. – P. 389–411.

10. *Ло*, *С.А.* Условия алгебраичности оператора взвешенного сдвига, порожденного потенциально периодическим отображением / Серинь Алиу Ло, Мусса О.А. Салем // Доклады НАН Беларуси. – 2011. – Т. 55, № 3. – С. 17–20.

11. *Belitskii*, *G.* On the normal solvability of cohomological equations on topological spaces / G. Belitskii, Y. Lyubich // Operator theory: Advances and applications. – 1998. – Vol. 103. – P. 75–87.

12. *Желобенко*, *Д.П.* Введение в теорию представлений / Д.П. Желобенко. – М.: Факториал Пресс, 2001. – 136 с.

Поступила в редакцию 14.02.15.